Concours d'Entrée

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

Durée : 4 heures

OPTION A

Les calculatrices sont interdites.

EXERCICE

1°) Quelle est la période de la fonction $f : x \to f(x) = |\sin x|$?

Développer *f* en série de Fourier. En quels points *f* est-elle égale à la somme de sa série de Fourier ?

2°) Soit φ une fonction continûment dérivable sur un intervalle compact $[a,b]$.

Montrer que : $\lim_{\alpha \to +\infty} \int_a^b \varphi(t)\cos(\alpha t)\ dt = 0$

puis en utilisant le résultat de la question 1 conclure que :

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \int_a^b \varphi(t)|\sin \lambda t|\, dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b \varphi(t)dt \ .$$

PROBLEME

On note $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ le $\mathbb{C}$ espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

- I -

Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on considère la fonction $(D-\lambda I)f$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par

$$\big((D-\lambda I)f\big)(x) = f'(x) - \lambda f(x)\,.$$

Puis pour chaque $m \in \mathbb{N}^*$ $(D-\lambda I)^m$ l'opérateur linéaire sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ défini par $(D-\lambda I)\circ(D-\lambda I)\circ\cdots\circ(D-\lambda I)$ *m* fois.

1°) Montrer par récurrence : pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, tout $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ et tout *x* de $\mathbb{R}$:

$\Big((D-\lambda I)^m f\Big)(x) = e^{\lambda x} D^m\left(f(x)e^{-\lambda x}\right)$ où D^m est l'opérateur de dérivation d'ordre *m* : $D^m g(x) = g^{(m)}(x)$.

2°) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ et tout $m \in \mathbb{N}^*$: $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{C})$ appartient au noyau de $(D-\lambda I)^m$ si et seulement si *f* est définie par : $f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ où *P* est un polynôme arbitraire, à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à *m*-1.

3°) Pour $m \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on note :

$E^{m,\lambda} = \Big\{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \,\Big|\, f(x) = P(x)e^{\lambda x}$ où *P* est un polynôme, à coefficients complexes, de degré inférieur ou égal à $m\Big\}$.

Le résultat de la question précédente s'écrit donc : $ker(D-\lambda I)^m = E^{m-1,\lambda}$.

Montrer que pour λ et μ deux nombres complexes distincts : $(D-\mu I)$ est un automorphisme (une application linéaire bijective) de $E^{m,\lambda}$.

4°) Pour $s \in N \setminus \{0,1\}$ on considère s entiers naturels différents de 0 : $p_1, p_2, \ldots, p_s$ et s nombres complexes distincts $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ si $i \neq j$) ; montrer que : $(E^{p_1,\lambda_1} + E^{p_2,\lambda_2} + \ldots + E^{p_{s-1},\lambda_{s-1}}) \cap E^{p_s,\lambda_s} = \{0\}$

$E^{p_1,\lambda_1} + E^{p_2,\lambda_2} + \ldots + E^{p_{s-1},\lambda_{s-1}}$ désigne l'ensemble des sommes $\sum_{j=1}^{s-1} f_j$ où chacun des f_j appartient à E^{p_j,λ_j}. (Indication : faire préalablement le cas s=2).

- II -

On considère le polynôme complexe : $P(z) = z^n - \sum_{i=1}^{n} c_i z^{n-i}$ $(n \geq 1)$.

On suppose connues les racines distinctes de P : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ d'ordres de multiplicité respectifs $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ (donc $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = n$) et $P(z) = (z-\lambda_1)^{\alpha_1}(z-\lambda_2)^{\alpha_2}\ldots(z-\lambda_p)^{\alpha_p}$.

Enfin on considère l'équation différentielle d'ordre n : $P(D)(y) = 0$ c'est-à-dire : $y^{(n)}(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i y^{(n-i)}(t)$ (E) .

1°) Montrer que pour $1 \leq i \leq p$ et $f \in E^{\alpha_i - 1, \lambda_i}$ f est solution de (E).

2°) En admettant (cf. votre cours) que l'ensemble S_p(E) des solutions de (E) est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension n, trouver une base de S_p(E) .

- III -

On note A une matrice $n \times n$ à coefficients complexes et on considère $X'(t) = AX(t)$ (S)

le système d'ordre n défini par A. On rappelle qu'il existe une unique fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans les matrices $n \times n$, à coefficients complexes, notée e^{tA} telle que $(e^{tA})' = Ae^{tA}$ et $e^{0A} = I_d$ (la matrice identité $n \times n$).

1°) Rappeler pourquoi $t \to e^{tA}X_0$ est l'unique solution du problème de Cauchy : trouver $X : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$, dérivable, satisfaisant, pour tout t de $\mathbb{R}$, $X'(t) = AX(t)$ et $X(0) = X_0$.

La résolution de (S) revient donc à calculer e^{tA}. Pour cela la clé de la démonstration est le théorème de Cayley-Hamilton que l'on rappelle ici : si $c(\lambda) = det(A - \lambda I_d)$ est le polynôme caractéristique de A on a $c(A) = 0$ (dans le polynôme c ; λ est remplacé par A et 1 par I_d).

2°) On pose $P_0 = I_d$ et pour i=1…n $\quad P_i = (A - \lambda_i I_d)P_{i-1}$

λ_i , i=1…n, désigne les différentes valeurs propres de A, chacune répétée autant de fois que sa multiplicité. Justifier que $P_n = 0$.

On pose a priori $e(t) = \sum_{i=1}^{n} W_i(t)P_{i-1}$, W_i fonction dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que si $W_1'(t) = \lambda_1 W_1(t)$ et $W_i'(t) = \lambda_i W_i(t) + W_{i-1}(t)$ pour i=2…n, on obtient $e'(t) = Ae(t)$.

3°) Quelles conditions initiales, pour t=0, doit-on prendre sur les W_i , i=1…n, pour obtenir $e(t) = e^{tA}$.

4°) Déterminer alors, par récurrence les W_i , i=1…n (la réponse contient, pour i=2…n, un signe intégrale).

- IV -

1°) Si y est solution de (E) trouver une matrice B, $n \times n$, telle que :

si on pose $X(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ y'(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) \end{bmatrix}$ X est solution de $X' = BX$.

En déduire que la connaissance de e^{tB} donne une base de $S_p(\mathrm{E})$.

2°) Inversement soit le système (S) $X' = AX$. On note encore $c(\lambda)$ le polynôme caractéristique de A, on suppose qu'il s'écrit $c(\lambda) = \lambda^n - \sum_{i=1}^{n} c_i \lambda^{n-i}$; montrer à l'aide du théorème de Cayley-Hamilton que $c(D)(e^{tA}) = 0$ ($c(D)F = 0$ signifiant encore : $F^{(n)} - \sum_{i=1}^{n} c_i F^{(n-i)} = 0$).

En déduire que tous les termes y de la matrice e^{tA} sont solutions de (E) c'est à dire satisfont $c(D)(y) = 0$.

Notation : à partir d'ici le polynôme P de **– II –** est le polynôme caractéristique c de A.

3°) On note $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ une base de $S_c(\mathrm{E})$. Justifier l'existence de n matrices $n \times n$ à coefficients complexes telles que :

$$e^{tA} = y_1(t)F_1 + y_2(t)F_2 + \ldots + y_n(t)F_n .$$

En dérivant n fois cette relation, montrer que :

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix} = W(y,0)^{-1} \begin{bmatrix} I_d \\ A \\ \vdots \\ A^{n-1} \end{bmatrix} \text{ où } W(y,t) = \begin{bmatrix} y_1(t) & y_2(t) & \cdots & y_n(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) & & y_n'(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t) & y_2^{(n-1)}(t) & & y_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} .$$

On admettra (cf. votre cours) que $\{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ est une base de $S_c(\mathrm{E})$ si et seulement si $\forall t \in \mathbb{R}\ det\big(W(y,t)\big) \neq 0$.

Si l'on suppose (E) résolue donner une expression de e^{tA} .

4°) Si $[\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n]$ est la 1ère ligne de e^{tB} montrer que :

$$e^{tA} = \varphi_1(t)I_d + \varphi_2(t)A + \ldots + \varphi_n(t)A^{n-1} .$$
